מטלת מנחה 15

## שאלה 1

נתונה פונקציה

ולכל : .

### סעיף א

טענה: היא פונקציה שתחומה וטווחה

טענת עזר: לכל :

הוכחת טענת העזר:

יהי ( וגם )( וגם )

ובפרט קיימים , :

:

:

מסגירות חיבור שלמים

( וגם ).

:

ניתן לחלק ב

( וגם ).

הוכחת הטענה:

יהי

היא פונקציה שתחומה :

פונקציהל תוצאה אחת ויחידה

פעולה בינארית ל תוצאה אחת ויחידה.

פעולה בינארית ל תוצאה אחת ויחידה.

ל תוצאה אחת ויחידה היא פונקציה.

כמו כן, תחומה הוא (ולא - קיים שאינו מוגדר!)

טווח הפונקציה הוא :

קיים :

.

לכן לפי טענת העזר הוא טווח הפונקציה .

לכן .

### סעיף ב

טענה: אם חח"ע אז חח"ע

הוכחה: יהיו ונניח

לכן .

נחסיר משני אגפי המשוואה ונקבל .

לפי ההנחה חח"ע.

### סעיף ג

טענה: אם על אז על

טענת עזר: לכל : .

הוכחת טענת העזר:

יהי ( וגם )( וגם ).

ובפרט קיימים , :

:

:

מסגירות חיסור שלמים

( וגם ).

:

.

( וגם )

הוכחה: נניח בשלילה לא על.

לכן קיים : לכל מתקיים

לכן

נחסר ונקבל

נחלק את אי השוויון ב (ניתן לעשות כך כי )

ונקבל

לפי טענת העזר, קיים איבר בטווח ללא מקור לא על

אבל לפי ההנחה על!

### 

### סעיף ד

טענה: אם הפיכה אז הפיכה

הוכחה:

הפיכה( על וגם חח"ע)

לפי סעיף ג, על על

לפי סעיף ב, חח"ע חח"ע

( על וגם חח"ע) הפיכה.

טענה: לכל : .

הוכחה: יהי

מסעיף ג נמצא בטווח .

כמו כן, הפיכה ולכן מוגדר היטב.

.

ולכן

## שאלה 2

תהי איזומטריה, ותהי נקודה כלשהי כך שהקבוצה היא קבוצת הנקודות במעגל שמרכזו .

נתון ש קבוצת שבת ביחס ל .

יהיו קצוות קוטר במעגל .

לשם נוחות אסמן: רדיוס המעגל

### סעיף א

טענה: קצוות קוטר במעגל

הוכחה:

:

לפי ההנחה קצוות קוטר במעגל ולכן .

קבוצת שבת   
 ולכן .

לכן הקטע הוא מיתר במעגל .

איזומטריה

כמו כן, קוטר במעגל ולכן

ולכן ( מיתר וגם ).

מיתר השווה באורכו לקוטר הוא קוטר בעצמו, ולכן קוטר

לכן קצוות קוטר במעגל קצוות קוטר במעגל .

### סעיף ב

טענה: נקודת שבת של .

הוכחה:

לפי ההנחה קוטר במעגל שמרכזו ולכן הוא מרכז הקטע .

מאחר ואיזומטריה מעתיקה אמצע קטע על אמצע קטע, הוא אמצע קטע .

בסעיף א הוכח כי הוא גם קוטר במעגל שמרכזו , ולכן גם הוא אמצע הקטע .

ולכן מיחידותו של מרכז קטע.

### סעיף ג

טענה: אם ואם אינה הזהות אז שיקוף

הוכחה:

לפי ההנחה ולפי סעיף ב.

לכן לאיזומטריה קיימות שתי נקודות שבת לפחות, והאיזומטריות היחידות שלהן יותר מנקודת שבת אחת הן שיקוף והזהות.

לכן ( הזהות או שיקוף).

בנוסף לפי ההנחה לא הזהות.

ולכן בהכרח שיקוף.

### 

### סעיף ד

תהי קבוצת כל הנקודות בתוך מעגל .

טענה: .

הוכחה:

מסעיף ב נובע כי נקודת שבת( הזהות או סיבוב סביב או שיקוף בישר העובר דרך ).

אם הזהות:

כל קבוצת נקודות במישור היא קבוצת שבת, לכן .

אם סיבוב סביב :

כל טבעת שמרכזה הוא מרכז הסיבוב, היא קבוצת שבת בסיבוב.

הוא איחוד כל הטבעות הללו, שרדיוסן קטן מ ולכן .

אם שיקוף בישר העובר ב:

כל קבוצת נקודות, שהיא סימטרית ביחס לישר עליו מתקיים השיקוף, היא קבוצת שבת בשיקוף.

הישר העובר ב הוא קוטר במעגל T, לכן הישר מחלק את העיגול לשני חלקים שווים.

ובמילים אחרות: לכל שאינה על הישר קיימת נקודה מעברו השני של הישר כך שהיא סימטרית לנקודה , וכל נקודה על הישר בתוך המעגל מועתקת על עצמה.

ולכן .

## שאלה 3

יהיו איזומטריות ויהיו נקודות שונות במישור, כך ש נקודות שבת ביחס ל.

לשם נוחות, נסמן: הוא הישר העובר בנקודות .

### סעיף א

טענה: אינה בהכרח הזהות.

הוכחה: קיימות איזומטריות המקיימות את כל ההנחות כך ש אינה הזהות.

למשל, כאשר :

נקודות שבת:

,   
 ולכן:

.

.

אינה הזהות:

.

### סעיף ב

טענה: אם הופכות את מגמת המשולשים אז .

הוכחה: נניח בשלילה .

נרכיב משמאל את ונקבל .

נקודות שבת של ל יותר מנקודת שבת אחת( או )

ולכן כי לפי הנחת השלילה .

לכן הופכת את מגמת המשולשים

אבל הופכות את מגמת המשולשים שומרת על מגמת המשולשים!

### סעיף ג

טענה: אם הופכות את מגמת המשולשים ואם ל נקודת שבת אז .

הוכחה:

לפי ההנחה הופכת מגמה וגם ל נקודת שבת שיקוף.

לכן כי שיקוף שווה להופכי של עצמו.

לפי ההנחה הופכות את מגמת המשולשים ולכן מסעיף ב

ולכן .

## שאלה 4

יהיו ישרים כמו באיור, כך ש .

נסמן: נקודת המפגש של ,

נקודת המפגש של .

המרחק בין ו

איזומטריה

### סעיף א

טענה: וגם

הוכחה:

לפי ההנחה ו.

לכן הזווית בין ל היא

ובאופן דומה הזווית בין ל היא

לכן .

באופן דומה ( וגם).

### סעיף ב

טענה: לכיוון מ ל

הוכחה:

לפי ההנחה

מסעיף א

באופן דומה

מקיבוציות הרכבת איזומטריות

לכן

לפי ההנחה , אנך להם והמרחק ביניהם הוא , ולכן לכיוון מ ל

ולכן לכיוון מ ל.

### סעיף ג

טענה: כל שיקוף מוזז מורכב על עצמו הוא הזזה.

הוכחה: יהי מספר כלשהו ו ישר כלשהו, ותהי איזומטריה כך ש שיקוף מוזז. הערה: כיוון ההזזה לא רלוונטי להוכחה

לכן

לכן מקיבוציות הרכבת איזומטריות

לכן

ולכן .